

TD 8 : Fonctions usuelles

Généralités sur les fonctions

1 ★★ Vrai ou faux ? Justifier.

- 1) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire, alors f est continue en 0.
- 2) Toute fonction croissante est ou bien strictement croissante, ou bien constante.
- 3) On peut trouver des fonctions majorées qui n'admettent pas de maximum.
- 4) La somme de deux fonctions monotones est une fonction monotone.
- 5) Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.
- 6) Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ est minorée sur $\mathbb{R}_+$.
- 7) Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ est minorée sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 ★★ Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x-5}} \quad f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{3x-1}{x-5}}$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{\tan x}{x^3 + 2x^2 + x} \quad f_4 : x \mapsto \ln(\sin x)$$

3 ★★ Soit $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

- 1) $g : x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right)$
- 2) $h : x \mapsto f(\sin x)$
- 3) $u : x \mapsto f(\sqrt{x})$
- 4) $v : x \mapsto f(2\cos x)$

4 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Soit f une fonction paire. Quelle est la parité de la fonction f^n ?
- 2) Même question si f est impaire.

5 ★★ Les fonctions suivantes sont-elles paires ? impaires ? périodiques ?

$$1) f(x) = \sin^2(x)$$

$$2) f(x) = \sin(x^2)$$

$$3) f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$4) f(x) = \tan(x) \sin(x)$$

6 ★★★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- 1) On suppose que f est impaire et positive. Montrer que f est nulle.
- 2) On suppose que f est paire et croissante. Montrer que f est constante.
- 3) On suppose que f est périodique et croissante. Montrer que f est constante.

7 ★★★★★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour tout réel c , on note $f_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_c(x) = f(x+c)$.

- 1) Par quelle transformation obtient-on le graphe de f_c à partir du graphe de f ?
- 2) On suppose qu'il existe des réels a et b tels que f_a est paire et f_b est impaire. Montrer que f est périodique.

Dérivabilité et études de fonctions

8 ★★ Déterminer les ensembles de définition, de dérivabilité et les dérivées des fonctions suivantes :

$$1) f : x \mapsto \frac{2x}{1-x^2}$$

$$2) f : x \mapsto (x^4 + 1)^5$$

$$3) f : x \mapsto \sqrt{3x-4}$$

$$4) f : x \mapsto 1 - \ln(5x-1)$$

$$5) f : x \mapsto |x+6|$$

$$6) f : x \mapsto \frac{1}{(1-x^2)^3}$$

$$7) x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

9 ★★ Par une étude de fonction, démontrer les assertions suivantes :

$$1) \forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1+x$$

$$2) \forall x > -1 \quad \ln(1+x) \leq x$$

$$3) \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$$

10 ★★ On pose $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

- 1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée (sur $\mathbb{R}^*$).
- 2) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
- 3) Est-ce que f' est continue ?

11 ★★ Étudier puis tracer les fonctions suivantes. On veillera, si possible, à bien réduire l'intervalle d'étude.

- 1) $f : x \mapsto \frac{1}{\tan x}$
- 2) $g : x \mapsto x \ln |x|$

12 ★★★ (*Lemme de Gronwall*) Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, dérivable, qui vérifie $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) \leq f(x)$$

Montrer que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$.

13 ★★★ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissantes pour lesquelles $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$.